ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ NHẤT NINH

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC XOAY VÒNG VÀ VẬN DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ NHẤT NINH

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC XOAY VÒNG VÀ VẬN DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Trần Xuân Quý

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên khác không
$\mathbb{N}_0$	Tập hợp các số tự nhiên $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	Tập hợp các số thực dương
$\sum\limits_{\text{cyc}} x$	$:= x + y + z$
$\sum\limits_{\text{cyc}} yz$	$:=xy + yz + zx$
$\sum\limits_{\text{cyc}}(y - z)^2$	$:= (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$
$\sum\limits_{\text{cyc}} x^2(y + z)$	$:= x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)$
$\sum\limits_{\text{cyc}} yz\lvert\sin nA\rvert^r$	$:= yz\lvert\sin nA\rvert^r + zx\lvert\sin nB\rvert^r + xy\lvert\sin nC\rvert^r$
$a\mid b$	a là ước của b.
$\Pi \cos^x \dfrac{A}{2}$	$:= \cos^x \frac{A}{2} \cos^y \frac{B}{2} \cos^z \frac{C}{2}$
$\Pi \sin nA$	$:= \sin nA \sin nB \sin nC$
$\Pi \cos \dfrac{2n+1}{2}A$	$:= \cos \frac{2n+1}{2}A \cos \frac{2n+1}{2}B \cos \frac{2n+1}{2}C$
$\Pi \cos nA$	$:= \Pi \cos nA \Pi \cos nB \Pi \cos nC$
$\Pi \cos^x \dfrac{A}{2}$	$:= \cos^x \frac{A}{2} \cos^y \frac{B}{2} \cos^z \frac{C}{2}$
$\sum\limits_{\text{cyc}} \tan \dfrac{2n+1}{2}A$	$:= \tan \frac{2n+1}{2}A + \tan \frac{2n+1}{2}B + \tan \frac{2n+1}{2}C$
$\sum\limits_{\text{cyc}} \operatorname{cotan} nA$	$:= \operatorname{cotan} nA + \operatorname{cotan} nB + \operatorname{cotan} nC$
$\Pi\left(1 + k\cos^2 nA\right)$	$:= (1 + k\cos^2 nA)(1 + k\cos^2 nB)(1 + k\cos^2 nC)$

Mở đầu

Trong tất cả các môn học, chúng ta đều biết rằng Toán học là bộ môn giúp chúng ta rèn luyện tư duy, logic và phát triển trí tuệ một cách toàn diện. Toán là quá trình tích lũy qua nhiều năm học tập, đặc biệt trong quá trình nghiên cứu khoa học những công thức, phương trình hay bất đẳng thức thật là mới mẻ và thú vị.

Lớp bất đẳng thức là một dạng toán phổ biến trong chương trình phổ thông. Hàng năm, trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi các cấp, thì đề tài về bất đẳng thức thường được chọn lựa. Và hiện nay, cũng đã có nhiều tài liệu tiếng việt về bất đẳng thức, tuy nhiên, những tài liệu khai thác về lịch sử của bất đẳng thức không nhiều, chủ yếu khai thác sâu về các chuyên đề cụ thể của từng bài toán bất đẳng thức. Với khuôn khổ luận văn thạc sĩ Toán học, chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp, tôi chọn lựa đề tài về bất đẳng thức xoay vòng với đối tượng là các biểu thức nhiều biến đối xứng. Mặc dù các bài toán riêng lẻ về biều thức nhiều biến đối xứng đã được nhiều tác giả khai thác và cải tiến bất đẳng thức tương ứng. Vì nhiều lý do trên chúng tôi đã chọn đề tài luận văn là "Bất đẳng thức xoay vòng và vận dụng". Luận văn xoay quanh chủ đề về bất đẳng thức xoay vòng, với các kết quả kinh điển như bất đẳng thức Schur, bất đẳng thức Shapiro,... Nội dung của luận văn không đi sâu vào tổng hợp các bài tập và lời giải về của lớp bất đẳng thức xoay vòng, mà đi sâu phân tích về lịch sử phát triển của dạng bất đẳng thức này. Kết quả chính của luận văn là trình bày lại nội dung của chương XVI ("Cyclic Inequalites") tài liệu [13], các tài liệu trích dẫn tương ứng trong sách và tài liệu tham khảo cuối luận văn. Cụ thể luận văn đã trình bày những vấn đề sau:

Chương 1. Trình bày các dạng của bất đẳng thức Schur, từ dạng rời rạc đến dạng liên tục (đối với lớp hàm dương lồi hoặc đơn điệu).

Chương 2. Trình bày được các một số dạng bất đẳng thức xoay vòng cơ bản, chẳng hạn như lớp bài toán cho ba số dương, các dạng bất đẳng thức xoay vòng có yếu tố lượng giác, dạng kiểu tam giác, bất đẳng thức Shapiro, một số mở rộng, và các bài toán vận dụng, tổng quát hóa một số bài toàn trong cuốn sách kinh điển về bất đẳng thức hình học "Geometric Inequalities" xem tài liệu [4].

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tai trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, em luôn nhận được sự quan tâm và giúp đỡ của các thầy cô cũng như toàn thể anh chị em tập thể lớp Cao học Toán K11B. Bài luận văn này như một lời tri ân tới tất cả vì đã truyền thụ cho em nhiều kiến thức và tinh thần quý báu trong suốt thời gian em là học viên của trường.

Đặc biệt em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Trần Xuân Quý đã luôn quan tâm ân cần, chỉ bảo, khích lệ và góp ý sâu sắc cho em trong suốt quá trình học tập cũng như thực hiện đề tài. Em xin chân thành cảm ơn những người thân yêu đã giúp đỡ, đồng hành cùng em trên chặng đường vừa qua!

Thái Nguyên, ngày 28 tháng 12 năm 2019

Học viên

Bùi Thị Nhất Ninh

Chương 1

Về bất đẳng thức xoay vòng

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

Trong mục này sẽ trình bày một số bất đẳng thức cơ bản nhất liên quan đến luận văn, một số hệ quả của các bất đẳng thức này mà có sử dụng sẽ không được trình bày, mà được chỉ ra như hệ quả hiển nhiên. Các hệ quả của các bất đẳng thức trình bày trong mục này và các bất đẳng thức liên quan có thể xem trong tài liệu [3] của GS. Nguyễn Văn Mậu.

1.1.1 Bất đẳng thức AM–GM

Bất đẳng thức AM–GM hay còn được gọi là bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân được viết tắt là AM-GM hoặc một số tài liệu viết là AG, có nội dung như sau:

Định lý 1.1.1 (Bất đẳng thức AM-GM). *Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số không âm. Khi đó*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots a_n$.

Bất đẳng thức trên có thể viết lại,

$$\frac{1}{n}a_1 + \frac{1}{n}a_2 + \cdots + \frac{1}{n}a_n \geqslant a_1^{\frac{1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} \cdots a_n^{\frac{1}{n}}.$$

Từ ý tưởng này, người ta đã chứng minh được kết quả tổng quát hơn là: Với α_i là các số không âm, có tổng bằng 1, và a_i là các số dương ($i = 1, 2, \ldots, n$), thì ta có bất đẳng thức

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_n a_n \geqslant a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}.\ldots.a_n^{\alpha_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Bất đẳng thức này được gọi là bất đẳng thức AM-GM suy rộng (hay còn được gọi là bất đẳng thức trung bình có trọng số hay bất đẳng thức trung bình lũy thừa có trọng số).

1.1.2 Bất đẳng thức Hölder, Jensen

Trước tiên, về bất đẳng thức Hölder tồn tại ở nhiều phiên bản, tuy nhiên chúng tôi chỉ trình bày ở dạng đại số và giải tích cơ bản, mà chúng phù hợp với chương trình phổ thông.

Kết quả dưới đây được gọi là bất đẳng thức Hölder.

Định lý 1.1.2 (Bất đẳng thức Hölder)**.** *Cho* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *và* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *là hai bộ n số thực dương và* $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Khi đó ta có bất đẳng thức sau*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_i^p = k b_i^q$ *với mọi* $i \in \{1, 2, , \ldots, n\}$.

Bất đẳng thức (1.1) với $p = q = 2$ còn được gọi là bất đẳng thức Cauchy-Schwartz hay còn được gọi là Buniacosky-Cauchy-Schwartz.

Kết quả tiếp theo là bất đẳng thức Hölder ở dạng giải tích, chúng tôi chỉ trình bày kết quả mà không chứng minh.

Định lý 1.1.3 (Bất đẳng thức Hölder dạng giải tích)**.** *Giả sử* (p, q) *là cặp số mũ liên hợp, tức là thỏa mãn điều kiện* $p, q > 1$ *với* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, f *và* g *là hai hàm số liên tục trên đoạn* $[a, b]$, *khi đó*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tồn tại hai số thực A và B không đồng thời bằng không sao cho

$$A\,|f(x)|^p = B\,|g(x)|^q \quad \forall x \in [a, b].$$

Tiếp theo là bất đẳng thức Jensen: Hàm số lồi hay gọi tắt hàm lồi là một khái niệm quan trọng trong toán học. Các kết quả về bất đẳng thức đối với lớp hàm lồi rất đa dạng trong giải tích toán học, để liên hệ tới nội dung của luận văn, chúng tôi trình bày một kết quả kinh điển của lớp bất đẳng thức này, đó là bất đẳng thức Jensen.

Định lý 1.1.4 (Bất đẳng thức Jensen)**.** *Giả sử hàm số $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ lồi trên khoảng (a, b). Khi đó với mọi $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ ta có bất đẳng thức sau*

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

1.2 Về bất đẳng thức Schur

Các kết quả về bất đẳng thức Schur được nghiên cứu và sử dụng trong nhiều khía cạnh của Toán học. Trong khuôn khổ luận văn Thạc sĩ Toán học, chuyên ngành phương pháp Toán sơ cấp, tôi chỉ trình bày hai trường hợp riêng của bất đẳng thức này mà đối tượng giáo viên và học sinh phổ thông có thể vận dụng được.

1.2.1 Bất đẳng thức Schur rời rạc

Trường hợp đầu tiên mà J. Wolstenholme trích dẫn trong cuốn sách "A Book of Mathemtical problems (1867)" là bài toán sau:

Nếu a, b, c là các số dương đôi một khác nhau thì ta có bất đẳng thức,

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) > 0 \text{ và}$$
$$a^3(a-b)(a-c) + b^3(b-c)(b-a) + c^3(c-a)(c-b) > 0.$$

Định lý 1.2.1 (Bất đẳng thức Schur)**.** *Nếu x, y, z là các số dương và λ là số thực tùy ý, thì ta có bất đẳng thức sau*

$$x^\lambda(x-y)(x-z) + y^\lambda(y-z)(y-x) + z^\lambda(z-x)(z-y) \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Chứng minh. Đặt $\Gamma = x^\lambda(x-y)(x-z)+y^\lambda(y-z)(y-x)+z^\lambda(z-x)(z-y)$. Nếu hai trong ba số x, y, z bằng nhau thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng. Thật vậy, chẳng hạn $y = z,\ \Gamma = x^\lambda(x-y)^2$. Không giảm tính tổng quát, giả sử rằng $x > y > z$. Vì λ là số thực tùy ý, nên ta xét hai trường hợp; $\lambda > 0$ và $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
\text{Nếu } \lambda \geqslant 0 \text{ thì } \Gamma &= (x-y)\left\{x^\lambda(x-z) - y^\lambda(y-z)\right\} + z^\lambda(x-z)(y-z)\\
&> (x-y)\left(x^\lambda - y^\lambda\right)(y-z) + z^\lambda(x-z)(y-z)\\
&> 0.\\
\text{Nếu } \lambda < 0 \text{ thì } \Gamma &= x^\lambda(x-y)(x-z) + (y-z)\left\{-y^\lambda(x-y) + z^\lambda(x-z)\right\}\\
&> x^\lambda(x-y)(x-z) + (y-z)\left(-y^\lambda + z^\lambda\right)(x-z)\\
&> 0.
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức (1.3) được chứng minh. □

Bất đẳng thức (1.3) được gọi là bất đẳng thức Schur. Đã có nhiều mở rộng của bất đẳng thức Schur. Kết quả dưới đây được xem là một mở rộng sơ cấp nhất của loại bất đẳng thức này của U. C. Guha (1962) như sau.

Định lý 1.2.2. *Nếu a, b, c, u, v, w là các số thực dương và thỏa mãn các bất đẳng thức sau*

$$a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}} \leqslant b^{\frac{1}{p}}, \tag{1.4}$$

$$u^{\frac{1}{p+1}} + w^{\frac{1}{p+1}} \geqslant v^{\frac{1}{p+1}}, \tag{1.5}$$

khi đó, nếu $p > 0$, thì

$$ubc - vca + wab \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Nếu $-1 < p < 0$ thì các bất đẳng thức trong (1.5) *và* (1.6) *đổi chiều; nếu $p < -1$ thì các bất đẳng thức* (1.4) *và* (1.5) *đổi chiều. Trong mỗi trường hợp,*